



@DiazepameKonkouri
دiazepam کنگوری مربع همه آزمون های آزمایشی



الف

A

آمادگی کنگور ۱۴۰۰

دوپینگ ماز

آزمون دوپینگ ماز – ۱۴۰۰/۰۳/۱۳

دفترچه پاسخ ریاضی (رشته تجربی)

مدت پاسخ گویی: ۴۷ دقیقه

تعداد سؤال: ۳۰

طراحان سؤال	ویراستاران
مهرداد کیوان	میلاد حسینی نامی
حسین شفیع زاده	ارسلان حسنوند
	سید جواد نظری



۱- ناظری به فاصله ۴۰ متر از پای دیواری که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده است. زاویه رؤیت انتها و ابتدای مجسمه با سطح افق 45° و 36° درجه است، ارتفاع مجسمه کدام است؟ $(\tan 36^\circ = 0.7)$

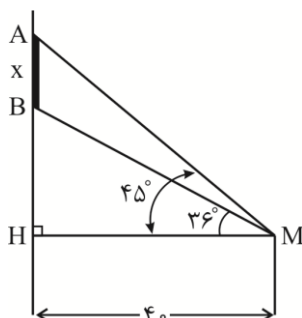
۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

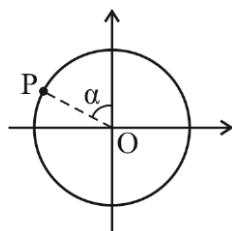


در مثلث قائم‌الزاویه AHM، $M = 45^\circ$ است، پس $MH = AH = 40$

$$\tan 36^\circ = \frac{BH}{MH} \Rightarrow 0.7 = \frac{BH}{40} \Rightarrow BH = 28$$

$$AH = 40 \Rightarrow x + 28 = 40 \Rightarrow x = 12$$

۲- نقطه $P(2a, 1+a)$ روی دایره مثلثاتی مطابق شکل قرار دارد. حاصل $\tan \alpha$ چقدر است؟

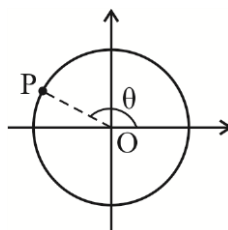


- (۱) $\frac{4}{3}$
- (۲) $\frac{2}{4}$
- (۳) $-\frac{4}{3}$
- (۴) $-\frac{2}{4}$

پاسخ: گزینه ۱

نکته: اگر $P(x, y)$ نقطه‌ای روی دایره مثلثاتی باشد، آنگاه:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = \cos \theta, y = \sin \theta \end{cases}$$



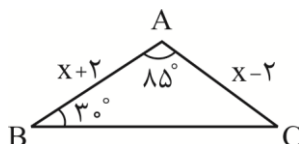
P روی دایره مثلثاتی است، پس:

$$(2a)^2 + (1+a)^2 = 1 \Rightarrow 5a^2 + 2a = 0 \xrightarrow{a \neq 0} a = -\frac{2}{5}$$

پس مختصات P به صورت $P(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ است.

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \tan \alpha = \tan(\theta - 90^\circ) = -\cot \theta = \frac{4}{3}$$





۳- در مثلث شکل مقابل، طول ضلع AB چقدر است؟ ($\sin 65^\circ = 0.9$)

۹ (۲)

۷ (۱)

۸ (۴)

۱۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

روش اول:

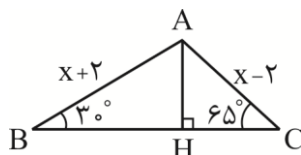
نکته: قضیه سینوس ها در مثلث ABC داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \frac{x-2}{\frac{1}{2}} = \frac{x+2}{0.9}$$

$$\Rightarrow 0.9x - 1/8 = \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow 0.4x = 2/8 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow AB = 9$$

زاویه C برابر 65° است.



$$\sin 65^\circ = \frac{AH}{AC} \Rightarrow 0.9 = \frac{AH}{x-2}$$

$$\Rightarrow AH = 0.9(x-2)$$

$$\sin 30^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{0.9(x-2)}{x+2} \Rightarrow x = 7 \Rightarrow AB = 9$$

روش دوم: ارتفاع AH را رسم می کنیم:

۴- اگر $\tan 25^\circ = 0.46$ باشد، حاصل $P = \frac{\sin 65^\circ - 3 \sin 155^\circ}{\cos 205^\circ - \cos 115^\circ}$ کدام است؟

$\frac{19}{27}$ (۴)

$\frac{17}{27}$ (۳)

$\frac{19}{25}$ (۲)

$\frac{17}{25}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

نکته:

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha \\ \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha \\ \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha \\ \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha \\ \tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \\ \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha \end{cases}$$



زوایا را بر حسب $90^\circ \pm \alpha$ یا $180^\circ \pm \alpha$ می نویسیم:

$$P = \frac{\sin(90^\circ - 25^\circ) - 3 \sin(180^\circ - 25^\circ)}{\cos(180^\circ + 25^\circ) - \cos(90^\circ + 25^\circ)} = \frac{\cos 25^\circ - 3 \sin 25^\circ}{-\cos 25^\circ + \sin 25^\circ}$$

صورت و مخرج را بر $\cos 25^\circ$ تقسیم می کنیم:

$$P = \frac{1 - 3 \tan 25^\circ}{-1 + \tan 25^\circ} = \frac{1 - 1/38}{-1 + 0/46} = \frac{38}{54} = \frac{19}{27}$$

۵- اگر $A = \cos \frac{7\pi}{3} \sin \frac{11\pi}{6}$ و $B = \cos \frac{7\pi}{6} \sin \frac{11\pi}{6}$ باشد، حاصل AB کدام است؟

$-\frac{3}{4}$ (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

نکته:

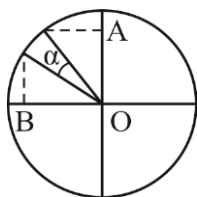
$$\begin{cases} \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \\ \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha \\ \tan(2\pi - \alpha) = -\tan \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha \\ \tan(2\pi + \alpha) = \tan \alpha \end{cases}$$

هر یک از زوایا را بر حسب $\pi \pm \alpha$ و $2\pi \pm \alpha$ می نویسیم:

$$\begin{aligned} A &= \cos(2\pi + \frac{\pi}{3}) \sin(4\pi - \frac{\pi}{3}) \\ &= \cos \frac{\pi}{3} (-\sin \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) \sin(2\pi - \frac{\pi}{6}) \\ &= (-\cos \frac{\pi}{6}) (-\sin \frac{\pi}{6}) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}) (-\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \Rightarrow AB &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$



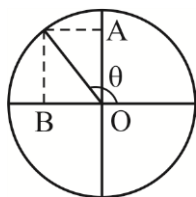
۶- در دایره مثلثاتی شکل مقابل $OA = OB = \frac{3}{5}$ است. مقدار $\cos(\alpha - \frac{\pi}{4})$ چقدر است؟

$-\frac{17}{25}$ (۱) $-\frac{7}{25}$ (۲) $-\frac{4}{5}$ (۴) $-\frac{3}{5}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

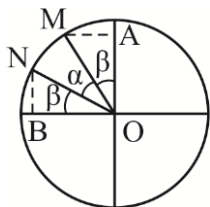


نکته: در دایره مثلثاتی شکل مقابل نسبت‌های مثلثاتی به صورت زیر تعریف می‌شود:



$$OA = \sin \theta, \quad OB = \cos \theta$$

دو مثلث OAM و ONB همنهشت‌اند، پس زاویه O در هر دو برابر β فرض می‌شود.



$$OA = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \cos \beta = \frac{3}{5}$$

$$\cos 2\beta = 2 \cos^2 \beta - 1 = 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = \frac{-7}{25}$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\beta\right) = \cos 2\beta = \frac{-7}{25}$$

۷- اگر $\tan x = \frac{1 + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \cos x}{2 \sin\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos(\pi + x)}$ باشد، مقدار $\cos x$ کدام است؟ ($x \neq k\pi$)

$$\frac{3}{5} \quad (4)$$

$$-\frac{3}{5} \quad (3)$$

$$-\frac{4}{5} \quad (2)$$

$$\frac{4}{5} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا دقت کنید که:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

حال در عبارت داده شده جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{1 + \sin x - \cos x}{-2 \cos x + \cos x} = \frac{1 + \sin x - \cos x}{-\cos x} = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow 1 + \sin x - \cos x = -\sin x \Rightarrow 2 \sin x = \cos x - 1 \quad *$$

حال دو طرف رابطه * را به توان ۲ رسانده و سپس از دو طرف تساوی عبارت $(1 - \cos x)$ را ساده می‌کنیم:

$$4 \sin^2 x = (\cos x - 1)^2 \Rightarrow 4(1 - \cos^2 x) = (1 - \cos x)^2$$

$$\xrightarrow{\cos x \neq 1} 4(1 + \cos x) = 1 - \cos x \Rightarrow \cos x = -\frac{3}{5}$$

۸- اگر α, β دو زاویه حاده و متمم یکدیگر باشند، کدام صحیح است؟

$$\cos 3\alpha + \cos 3\beta = 0 \quad (2)$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta = 0 \quad (1)$$

$$\sin 3\alpha + \sin 3\beta = 0 \quad (4)$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta = 0 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳



روش اول:

نکته: سینوس دو زاویه مکمل با یکدیگر برابر و کسینوس دو زاویه مکمل با یکدیگر قرینه‌اند.

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = \pi$$

پس 2α و 2β مکمل یکدیگرند. پس $\cos 2\alpha = -\cos 2\beta$ لذا گزینه ۳ صحیح است.روش دوم: با انتخاب دو زاویه 30° و 60° می‌توانیم صحت گزینه‌ها را بررسی کنیم:

$$\text{گزینه ۱: } \sin 60^\circ + \sin 120^\circ = 0 \quad \text{نادرست}$$

$$\text{گزینه ۲: } \cos 90^\circ + \cos 180^\circ = 0 \quad \text{نادرست}$$

$$\text{گزینه ۳: } \cos 60^\circ + \cos 120^\circ = 0 \quad \text{درست}$$

$$\text{گزینه ۴: } \sin 90^\circ + \sin 180^\circ = 0 \quad \text{نادرست}$$

۹- اگر $\sin x + \cos x = 1$ و $x \neq 2k\pi$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام است؟

$$-\frac{4}{3} \quad (4)$$

$$\frac{4}{3} \quad (3)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

COS X را به سمت راست انتقال داده و سپس دو طرف تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$3 \sin x = 1 - \cos x \quad *$$

$$\Rightarrow (3 \sin x)^2 = (1 - \cos x)^2$$

$$\Rightarrow 9(1 - \cos^2 x) = (1 - \cos x)^2$$

از دو طرف تساوی $1 - \cos x$ را ساده می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\cos x \neq 1} 9(1 + \cos x) = 1 - \cos x \Rightarrow \cos x = \frac{-4}{5}$$

با جایگذاری در تساوی * مقدار $\sin x$ به دست می‌آید.

$$3 \sin x = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \sin x = \frac{3}{5} \Rightarrow \tan x = \frac{-3}{4}$$

۱۰- حاصل $P = \frac{\cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}} \left(\cos x - \frac{1}{\cos x} \right)$ به‌ازای $x = \frac{\pi}{6}$ چقدر است؟

$$-\frac{1}{4} \quad (4)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا به کمک اتحادها، عبارت را ساده می‌کنیم.

$$P = \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}} \left(\frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} \right) = \frac{\cos x}{\sin x} \times \frac{-\sin^2 x}{\cos x} = \cos x \times \frac{-\sin^2 x}{\cos x} = -\sin^2 x$$

$$x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow P = -\frac{1}{4}$$



۱۱- مقدار $P = 2 \sin^2 \frac{\pi}{24} + \sin \frac{5\pi}{12}$ برابر کدام است؟

$1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$1 - \frac{\sqrt{3}}{4}$ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

نکته:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

با توجه به این فرمول حاصل $2 \sin^2 \frac{\pi}{24}$ با $1 - \cos \frac{\pi}{12}$ برابر است.

$$P = 1 - \cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{5\pi}{12} = 1 - \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}) + \sin \frac{5\pi}{12} = 1 - \sin \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{5\pi}{12} = 1$$

۱۲- اگر $\tan(\frac{3\pi}{2} - x) = 2$ باشد، مقدار $\sin(2x - \frac{\pi}{2})$ کدام است؟

$\frac{4}{5}$ (۴)

$\frac{3}{5}$ (۳)

$-\frac{4}{5}$ (۲)

$-\frac{3}{5}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

نکته:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan(\frac{3\pi}{2} - x) = \cot x = 2 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos x = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \text{یا} \\ \sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\sin(2x - \frac{\pi}{2}) = -\cos 2x = -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}) = -\frac{3}{5}$$

۱۳- اگر $\sin x(\cos x - \sin x) = -\frac{1}{4}$ باشد، مقدار $\sin 4x$ کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (۴)

$-\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{3}{8}$ (۲)

$-\frac{3}{8}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

نکته:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\begin{cases} 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha \\ 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha \end{cases}$$

به کمک اتحادهای بالا داریم:

$$2 \sin x(\cos x - \sin x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x - (1 - \cos 2x) = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 2x + \cos 2x = \frac{1}{2}$$



حال دو طرف تساوی را به توان دو می‌رسانیم:

$$\sin^2 2x + \cos^2 2x + 2 \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 1 + \sin 4x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 4x = -\frac{3}{4}$$

۱۴- اگر $\sin^3 x + \cos^3 x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sin 2x$ باشد، مقدار $2 \sin x$ کدام است؟

$$1 - 2 \cos x \quad (4)$$

$$1 - \cos x \quad (3)$$

$$1 - \frac{1}{2} \cos x \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} - \cos x \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

از اتحاد $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ و اتحاد چاق و لاغر $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ استفاده می‌کنیم:

$$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sin 2x$$

$$\Rightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = \frac{1}{4}(1 - \sin 2x)$$

$$\Rightarrow \sin x + \cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow 2 \sin x = 1 - 2 \cos x$$

۱۵- اگر $\tan x + \cot x = \frac{2}{5}$ باشد، حاصل $\sin^4 x + \cos^4 x$ کدام است؟

$$0.68 \quad (4)$$

$$0.64 \quad (3)$$

$$0.72 \quad (2)$$

$$0.76 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

از اتحاد $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \quad *$$

از طرف دیگر فرض سؤال را ساده می‌کنیم:

$$\tan x + \cot x = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{5}{2} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{2}{5}$$

حال در رابطه * را جایگزین می‌کنیم:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^2 = 1 - \frac{8}{25} = 0.68$$

۱۶- مجموع مقادیر max و min تابع $y = 2a + 3 \sin\left(\frac{\pi}{3}ax - \frac{\pi}{3}\right)$ برابر ۱۲ است. دوره تناوب این تابع کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$\frac{4}{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱



نکته: اگر $y = c + a \sin(bx + k)$ آنگاه:

$$\begin{cases} \min = c - |a| \\ \max = c + |a| \end{cases}, \quad T = \frac{2\pi}{|b|}$$

با توجه به فرمول های بالا داریم:

$$\begin{cases} \max = 2a + 3 \\ \min = 2a - 3 \end{cases} \Rightarrow 2a + 3 + 2a - 3 = 12 \Rightarrow a = 3$$

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}a} = \frac{4}{a} = \frac{4}{3}$$

دوره تناوب:

۱۷- در تابع مثلثاتی f دوره تناوب، ماکزیمم و مینیمم به ترتیب برابر π ، ۷ و -۳ است. ضابطه این تابع کدام می تواند باشد؟

$$5 - 2 \cos 2x \quad (4)$$

$$5 - 2 \cos \frac{x}{2} \quad (3)$$

$$2 - 5 \sin 2x \quad (2)$$

$$2 - 5 \sin \frac{x}{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

نکته: در توابع به فرم $c \pm a \sin bx$ و $c \pm a \cos bx$ دوره تناوب، ماکزیمم و مینیمم به ترتیب برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ ، $c + |a|$ و $c - |a|$ است.

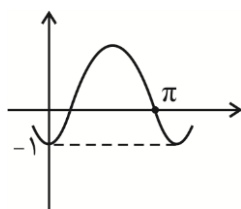
جواب سؤال را $c \pm a \sin bx$ یا $c \pm a \cos bx$ فرض کنید. طبق نکته بالا، a, b, c را به دست می آوریم.

$$\begin{cases} c + |a| = 7 \\ c - |a| = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ |a| = 5 \end{cases}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 \pm 5 \sin 2x \quad \text{یا} \quad f(x) = 2 \pm 5 \cos 2x$$

۱۸- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = 1 + a \cos bx$ است. دوره تناوب این تابع چند برابر ماکزیمم آن است؟



$$\frac{5\pi}{3} \quad (1)$$

$$\frac{2\pi}{5} \quad (2)$$

$$2\pi \quad (3)$$

$$\frac{3\pi}{4} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۲

بدون لطمه زدن به جواب، می توان b را مثبت فرض کرد، با توجه به این که $\min$ تابع روی محور y هاست، پس $a < 0$ است.

$$\min = 1 + a = -1 \Rightarrow a = -2$$

نمودار تابع از نقطه $(\pi, 0)$ می گذرد.

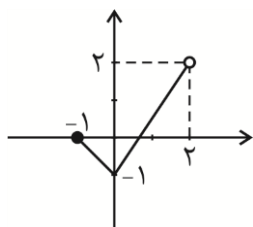
$$0 = 1 + a \cos b \pi = 1 - 2 \cos b \pi \Rightarrow \cos b \pi = \frac{1}{2}$$



چون $x = \pi$ دومین نقطه برخورد تابع با محور x هاست، پس $b\pi$ باید دومین زاویه‌ای باشد که $\cos b\pi$ برابر $\frac{1}{3}$ است، یعنی $b\pi = \frac{5\pi}{3}$ و $b = \frac{5}{3}$.

$$\frac{T}{\max} = \frac{\frac{2\pi}{b}}{1+|a|} = \frac{\frac{6\pi}{5}}{1+2} = \frac{2\pi}{5}$$

۱۹- تابع f متناوب با دوره تناوب ۳ است. اگر بخشی از نمودار آن به صورت مقابل باشد، حاصل $f(11) - 2f(12)$ کدام است؟



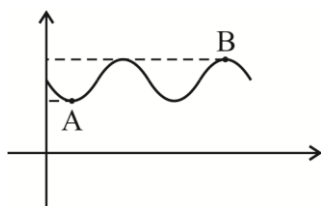
- (۱) -۲
- (۲) ۲
- (۳) ۴
- (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲

نکته: اگر تابع f متناوب با دوره تناوب T ، k عدد صحیح باشد، آنگاه $f(x + kT) = f(x)$.

$$\begin{aligned} f(11) &= f(-1 + 12) = f(-1 + 4T) = f(-1) = 0 \\ f(12) &= f(0 + 12) = f(0) = -1 \\ \Rightarrow f(11) - 2f(12) &= 0 - 2(-1) = 2 \end{aligned}$$

۲۰- قسمتی از نمودار تابع $y = 2 - (\sin x \cos x)$ به صورت مقابل است. شیب پاره خط AB چقدر است؟



- (۲) $\frac{2}{5\pi}$
- (۴) $\frac{1}{3\pi}$

- (۱) $\frac{4}{5\pi}$
- (۳) $\frac{2}{3\pi}$

پاسخ: گزینه ۳

$$y = 2 - \frac{1}{2} \sin 2x$$

نقطه A اولین $\min$ تابع است. پس اولین ریشه معادله $\sin 2x = 1$ مورد نظر است.

$$\sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow A = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

نقطه B دومین $\max$ تابع است. پس دومین ریشه معادله $\sin 2x = -1$ مورد نظر است.

$$\sin 2x = -1 \Rightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow B = \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5}{2}\right)$$

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{2\pi}{4}} = \frac{2}{\pi}$$

۲۱- نمودار تابع $y = 2a + 4 \cos \frac{\pi}{3} x$ بر محور طول‌ها مماس شده است. مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

- (۴) ۲

- (۳) ۴

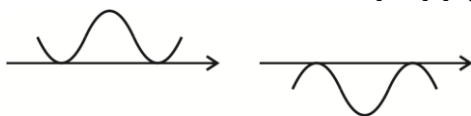
- (۲) -۳

- (۱) ۱

پاسخ: گزینه ۴

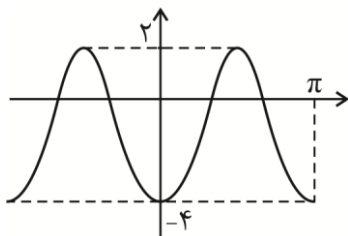


مماس بودن تابع مثلثاتی $c + a \sin bx$ بر محور x ها به معنای آن است که $\max$ یا $\min$ تابع برابر صفر است.



$$\max = 2a + 4 = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$\min = 2a - 4 = 0 \Rightarrow a = 2$$



۲۲- بخشی از نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل مقابل است. ضابطه f کدام می تواند باشد؟

(۱) $-3 - \cos 2x$

(۲) $-4 - \sin 2x$

(۳) $1 - 3 \cos 2x$

(۴) $-1 - 3 \cos 2x$

پاسخ: گزینه ۴

نکته: در تابع مثلثاتی $c + a \cos bx$ ، دوره تناوب، ماکزیمم و مینیمم به ترتیب برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ ، $c + |a|$ و $c - |a|$ است.

دقت کنید که هرگاه $\max$ یا $\min$ تابع روی محور y ها باشد نمودار کسینوسی است و چون $\min$ روی محور y هاست پس ضریب کسینوس منفی است.

$$f(x) = c + a \cos bx$$

$$\begin{cases} \max = 2 = c + |a| \\ \min = -4 = c - |a| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -1 \\ |a| = 3 \end{cases} \xrightarrow{a < 0} a = -3$$

$$T = \pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 2$$

پس تابع به صورت $y = -1 - 3 \cos 2x$ است.

۲۳- تابع $y = \tan(2x - \frac{\pi}{4})$ در بازه $(\frac{\pi}{4}, a)$ اکیداً یکنواست. حداکثر a کدام است؟

(۴) $\frac{3\pi}{2}$

(۳) $\frac{5\pi}{8}$

(۲) $\frac{7\pi}{8}$

(۱) $\frac{3\pi}{4}$

پاسخ: گزینه ۲

روش اول:

نکته: تابع $y = \tan(ax + b)$ در بازه (α, β) به شرطی اکیداً یکنواست که در این بازه تعریف شده باشد. در این صورت باید $ax + b \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ باشد.

$$\frac{\pi}{2} < x < a \Rightarrow \pi < 2x < 2a \Rightarrow \frac{3\pi}{4} < 2x - \frac{\pi}{4} < 2a - \frac{\pi}{4}$$

به شرطی تابع تانژانت در بازه $(\frac{3\pi}{4}, 2a - \frac{\pi}{4})$ تعریف شده است که انتهای بازه حداکثر برابر $\frac{3\pi}{4}$ باشد.

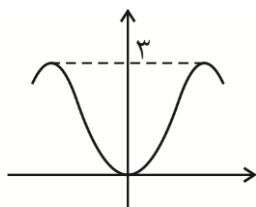
$$2a - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow a = \frac{7\pi}{8}$$



روش دوم:

مجانبات های $\tan x$ به ترتیب $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$ و مجانبات های $\tan(2x - \frac{\pi}{4})$ به ترتیب $\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$ است و چون $\frac{\pi}{2}$ در این بازه است، پس حداکثر a برابر $\frac{7\pi}{8}$ است.

۲۴- بخشی از نمودار تابع $f(x) = a - b \cos(\frac{\pi}{3}x)$ شکل مقابل است. حاصل $f(\frac{4}{3})$ کدام است؟



(۱) ۲/۲۵

(۲) ۲/۵

(۳) ۲/۷۵

(۴) ۱/۷۵

پاسخ: گزینه ۱

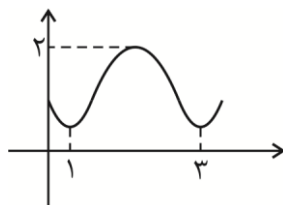
چون $\min$ تابع روی محور y هاست، بنابراین ضریب کسینوس منفی است، پس با توجه به ضابطه تابع، b باید مثبت باشد.

$$\begin{cases} \min = a - b \\ \max = a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos(\frac{\pi}{3}x)$$

$$\Rightarrow f(\frac{4}{3}) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos \frac{4\pi}{3} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

۲۵- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b \sin(a\pi x)$ است. مقدار $2a - b$ چقدر است؟



(۱) ۱

(۲) -۱

(۳) ۳

(۴) -۳

پاسخ: گزینه ۳

دقت کنید در نقطه $x = 0$ نمودار تابع نزولی است، پس $b < 0$ است (چون $f(0)$ مثبت است، پس $a > 0$).

$$\max = a + |b| = a - b = 2$$

از طرفی فاصله دو $\min$ متوالی یک دوره تناوب است.

$$T = 3 - 1 = 2 = \frac{2\pi}{|a\pi|} \xrightarrow{a > 0} a = 1 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow 2a - b = 3$$

۲۶- جواب های معادله مثلثاتی $\cos 2x + \sin 3x = 0$ روی دایره مثلثاتی، رئوس کدام چند ضلعی است؟

(۴) شش ضلعی

(۳) پنج ضلعی

(۲) مربع

(۱) مثلث

پاسخ: گزینه ۳



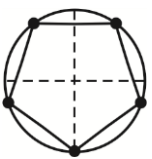
روش اول:

نکته: مجموعه جواب معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = \pm \alpha + 2k\pi$ است.

$$\cos 2x = -\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi \\ 2x = -\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2k\pi - \frac{\pi}{2} \xrightarrow{k=0} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{2k\pi}{5} - \frac{\pi}{10} \xrightarrow{k=0,1,2,3,4} x = -\frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{7\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$



دقت کنید به k تا جایی اعداد صحیح را نسبت می دهیم که جواب های به دست آمده روی دایره مثلثاتی متمایز باشند.

روش دوم: $\frac{2k\pi}{n} + \alpha$ روی دایره مثلثاتی n نقطه را نشان می دهند.

۲۷- جواب کلی معادله مثلثاتی $2\cos^2 x + \sin x = 1$ کدام است؟

$$\frac{k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6} \quad (۳)$$

$$2k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (۲)$$

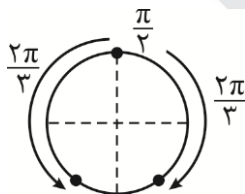
$$\frac{\pi}{2} \pm \frac{2k\pi}{3} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

نکته: جواب معادله مثلثاتی $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = \alpha + 2k\pi$, $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ است.

$$2(1 - \sin^2 x) + \sin x = 1 \Rightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Rightarrow (\sin x - 1)(2\sin x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$



اگر جواب ها را روی دایره مثلثاتی نمایش دهیم، به صورت کلی $\frac{\pi}{2} \pm \frac{2k\pi}{3}$ می باشد.

۲۸- مجموع جواب های معادله مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{6}) = 1$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

$$\frac{5\pi}{3} \quad (۴)$$

$$2\pi \quad (۳)$$

$$\frac{7\pi}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{8\pi}{3} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲



با توجه به رابطه $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$ معادله را ساده می کنیم.

$$\cos(x - \frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{2} + x - \frac{\pi}{6}) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$$

پس معادله به صورت زیر است:

$$\sin(x + \frac{\pi}{3}) + \sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1$$

$$\Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \\ \text{یا} \\ x + \frac{\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{11\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{7\pi}{3}$$

۲۹- اگر $x = \frac{\pi}{3}$ یک جواب معادله $\cos 2x + a \cos x = 0$ باشد، یک جواب دیگر این معادله کدام است؟

$$\frac{2\pi}{3} \quad (4)$$

$$\pi \quad (3)$$

$$\frac{4\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{7\pi}{6} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا $\frac{\pi}{3}$ را در معادله جایگزین می کنیم:

$$\cos \frac{2\pi}{3} + a \cos \frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow a = 1$$

حال به کمک رابطه $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ معادله را حل می کنیم:

$$2\cos^2 x - 1 + \cos x = 0 \Rightarrow (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi, \dots \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \dots \end{cases}$$

۳۰- اختلاف بزرگ ترین و کوچک ترین جواب معادله مثلثاتی $\tan x \cdot \tan(x - \frac{\pi}{3}) = 1$ در بازه $(0, \pi)$ کدام است؟

$$\frac{\pi}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{6} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

نکته: جواب معادله مثلثاتی $\tan x = \tan \alpha$ به صورت $x = \alpha + k\pi$ است.

سعی می کنیم دو طرف تساوی را بر حسب تانژانت بنویسیم:

$$\tan x = \frac{1}{\tan(x - \frac{\pi}{3})} = \cot(x - \frac{\pi}{3}) = \tan(\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

$$k = 0, 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \Rightarrow x_2 - x_1 = \frac{6\pi}{6} = \pi$$

